
CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS

Efraín Soto Apolinar

TÉRMINOS DE USO

Derechos Reservados © 2010.

Todos los derechos reservados a favor de Efraín Soto Apolinar.

Soto Apolinar, Efraín.
Construcciones Geométricas.
Primera edición.
México. 2010.

Apreciado lector, usted puede sentirse libre de utilizar la información que se encuentra en este material, bajo las siguientes condiciones:

Atribución: Debe dar crédito al autor del libro, independientemente del medio que se utilice para su divulgación (impresa, electrónica, en línea, etc.)

Uso no comercial: No se permite el uso de este material ni de su contenido con fines comerciales y/o lucro en forma alguna. Puede utilizarlo con fines educativos o de divulgación de las ciencias. Se permite el uso por instituciones educativas públicas o privadas sin fines de lucro, con la condición de que no se aplique cargo, ni en especie ni en moneda, ni en cualquier otra forma, a los usuarios finales de este material, sean estos profesores, autoridades educativas, estudiantes o público en general interesado en la enseñanza y/o el aprendizaje de las matemáticas.

No Modificar: No se permite alterar, transformar, modificar, en forma alguna este material. Usted tiene permiso para utilizarlo “*como está y es*”. No se permite ni agregar, ni eliminar, ni modificar: palabras, u oraciones, o párrafos, o páginas, o subsecciones, o secciones, o capítulos o combinaciones de las anteriores o parte alguna del libro.

Permisos: Puede contactar al autor de este material directamente a la cuenta de correo electrónico que aparece en los créditos. Si usted tiene una copia de este libro en formato PDF y desea publicarlo en algún sitio de Internet, primero solicite permiso al autor a través de un mensaje a la cuenta de correo electrónico que aparece en los créditos. No requiere de permiso alguno para imprimir una copia de este material para uso personal.

Responsabilidad: Ni el autor, ni el editor son responsables de cualquier pérdida o riesgo o daño (causal, incidental o cualquier otro), ocasionado debido al uso o interpretación de la información que se incluye en este material.

Versión Electrónica de distribución gratuita.

Estrictamente prohibido el uso comercial de este material.

Prefacio

Este cuaderno consiste en la compilación de las construcciones geométricas que se incluyen en el sitio de Internet:

<http://www.aprendematematicas.org.mx/>

En la sección: Tutoriales/Construcciones Geométricas.

La idea de compartir este material se justifica en que algunos profesores no tienen acceso permanente a Internet, de manera que pueden descargar este material e imprimirlo para poder continuar su capacitación en la geometría plana, específicamente en las construcciones con regla y compás.

En verdad espero que este material le permita prepararse mejor y enseñar las matemáticas con mayor impacto en sus estudiantes, es decir, de una manera más atractiva.

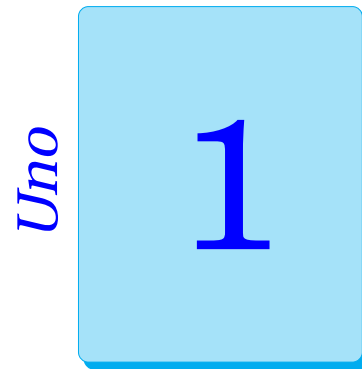
Le agradezco infinitamente respetar los términos de uso de este material.

Efraín Soto Apolinar
Monterrey, N.L., México.
Mayo de 2010.

Índice de contenidos

Términos de uso	ii
Prefacio	iii
Construcciones básicas	1
Trazar un triángulo equilátero dado un lado	3
Trazar una perpendicular a una recta por uno de sus puntos	4
Trazar una perpendicular a una recta por un punto externo	6
Trazar la mediatriz de un segmento	7
Trazar el punto medio de un segmento	9
Construcción del simétrico de un punto	9
Construcción de un cuadrado dado uno de sus lados	10
Construcción de un segmento de una longitud dada	12
Construcción de la suma de dos segmentos	12
Construcción de la diferencia de dos segmentos	12
Trazar una bisectriz	13
Hacer una copia de un ángulo	14
Suma de dos ángulos	15
Diferencia de dos ángulos	16
Construir un triángulo dados un ángulo interno y dos lados adyacentes	16
Construir un triángulo dados dos ángulos y el lado que comparten	17
Construir un triángulo dados sus tres lados	18
Trazar una paralela a una recta por un punto dado	19
Dividir un segmento en n segmentos congruentes	19

Trazar la circunferencia circunscrita a un triángulo	20
Trazar la circunferencia inscrita a un triángulo	21
Trazar la circunferencia que pasa por tres puntos	21
Trazar la circunferencia dado un arco	22
Ubicar el centro de una circunferencia	23
Trazar un ángulo de 60°	23
Trazar un ángulo de 30°	24
Trazar un ángulo de 15°	24
Trazar un hexágono regular	24
Trazar un rectángulo áureo	25
Trazar una espiral áurea	26
Trazar un pentágono regular	26
Trazar un decágono regular	28
Trazar un octágono regular	28
Trazar un dodecágono regular	29
Créditos	30



Construcciones básicas

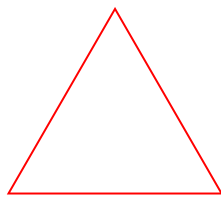
§ 1.1. Trazar un triángulo equilátero dado un lado

§ 1.1

TRIÁNGULO EQUILÁTERO

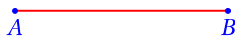
Aquel triángulo que tiene todos sus lados de la misma medida.

Definición 1.1.1



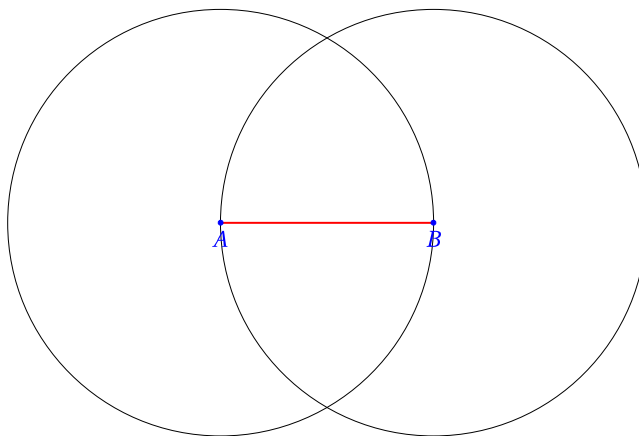
Triángulo equilátero

Empezamos trazando uno de sus lados que servirá de base para el triángulo:



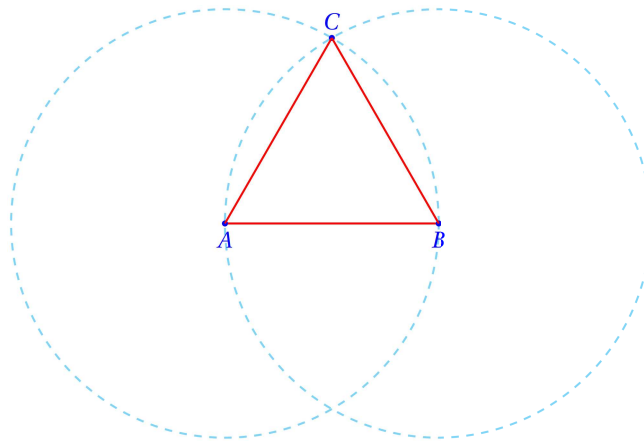
Ahora trazamos una circunferencia con centro en cada uno de los extremos del segmento que pase por el otro extremo.

Es decir, el radio de la circunferencia es igual a la longitud del segmento.



El punto de intersección de las dos circunferencias es el tercer vértice del triángulo equilátero.

Trazamos los segmentos \overline{AC} y \overline{BC} para obtener el triángulo equilátero:



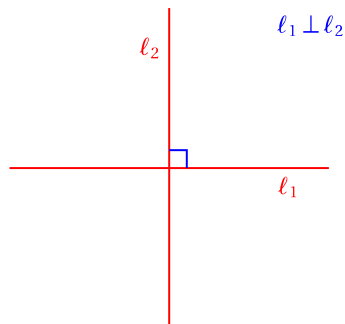
§ 1.2

§ 1.2. Trazar una perpendicular a una recta por uno de sus puntos

Definición 1.2.1

RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas son perpendiculares si al cortarse forman cuatro ángulos de la misma medida.

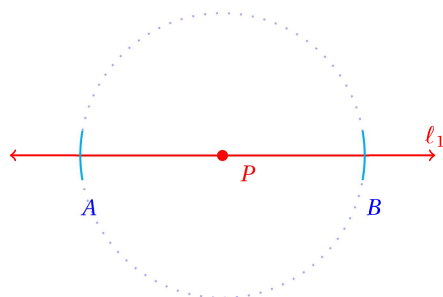


Vamos a trazar la perpendicular a la recta dada ℓ_1 por uno de sus puntos.

Empezamos dibujando la recta a la cual se le trazará la perpendicular:

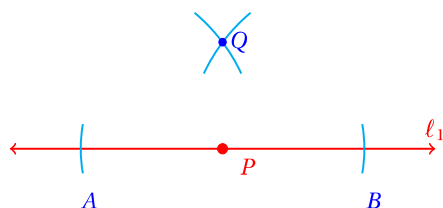


Con ayuda del compás vamos a trazar dos arcos que corten la recta ℓ_1 apoyándonos en el punto P , como se muestra enseguida:



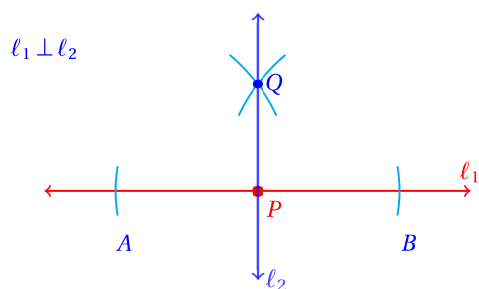
donde A y B son los puntos de intersección del arco con la recta ℓ_1 .

Ahora vamos a trazar, con una mayor abertura del compás, dos arcos que se corten, apoyándonos primero en el punto A y luego en B .



El punto de intersección de los arcos es Q

Ahora basta unir los puntos P y Q para obtener la recta ℓ_2 perpendicular a ℓ_1 :



Y terminamos.

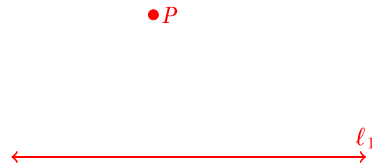
Efrain Soto A.

www.aprendematematicas.org.mx

§ 1.3

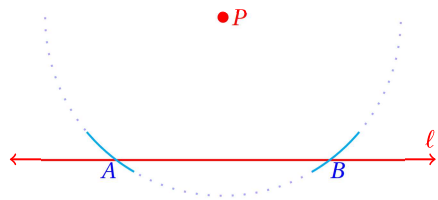
§ 1.3. Trazar una perpendicular a una recta por un punto externo

Empezamos dibujando la recta a la cual se le trazará la perpendicular:



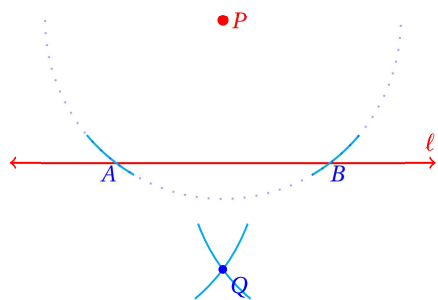
La perpendicular debe pasar por el punto P , que es externo a la recta l_1 dada.

Apoyando el compás en el punto P trazamos dos arcos que corten la recta l_1 como se muestra enseguida:



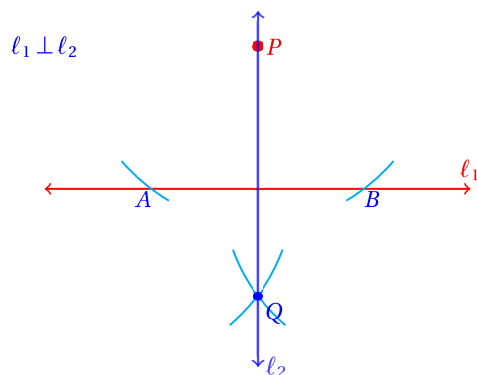
donde A y B son los puntos de intersección del arco con la recta l_1 .

Ahora vamos a trazar, con el mismo radio, apoyándonos primero en A y luego en B dos arcos que se corten.



El punto de intersección de los dos arcos se llama Q .

Trazamos la recta que pasa por los puntos P y Q .



Y terminamos.

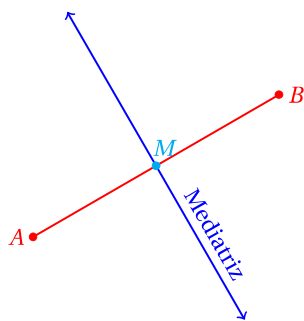
§ 1.4

§ 1.4. Trazar la mediatriz de un segmento

MEDIATRIZ

La mediatriz de un segmento es la recta que es perpendicular al segmento y que pasa por su punto medio.

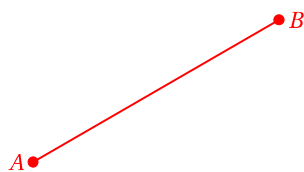
Definición 1.4.1



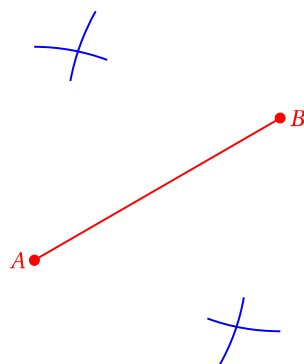
Los puntos A y B son extremos del segmento y el punto M es el punto medio de éstos.

Ahora vamos a trazar una mediatriz a un segmento dado.

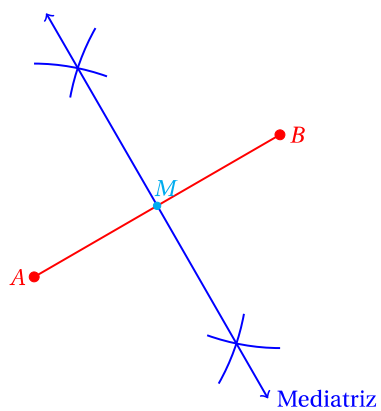
Empezamos mostrando el segmento al cual trazaremos la mediatriz:



Con el compás abierto más que la mitad de la longitud del segmento, trazamos arcos de mismo radio que se corten mutuamente, apoyándonos primero en A y luego en B como se muestra enseguida:



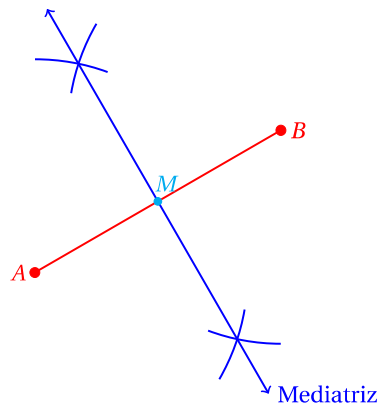
Ahora solo falta trazar la recta que pasa por los puntos de intersección de los arcos para obtener la mediatriz del segmento \overline{AB} :



§ 1.5. Trazar el punto medio de un segmento

§ 1.5

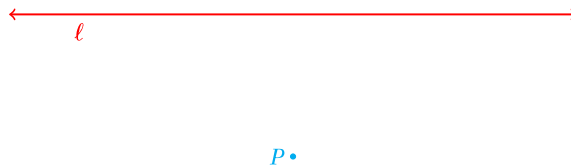
Utilizando la construcción anterior, vemos que el punto M indicado es el punto medio del segmento \overline{AB} .



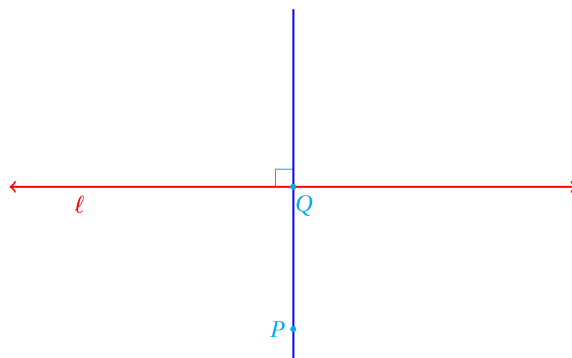
§ 1.6

§ 1.6. Construcción del simétrico de un punto

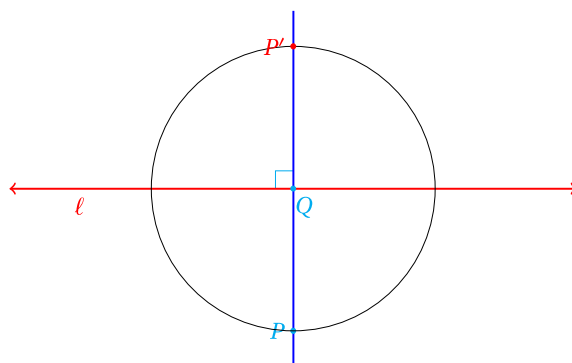
Empezamos con el punto P y la recta:



Trazamos una perpendicular a la recta ℓ que pase por el punto P .
(ver construcción 3)



El punto Q es la intersección de la recta ℓ y la perpendicular que pasa por P .
Finalmente, trazamos una circunferencia con centro el punto Q que pase por P :



El punto P' es el punto simétrico de P respecto a la recta ℓ .

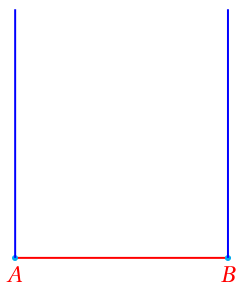
§ 1.7

§ 1.7. Construcción de un cuadrado dado uno de sus lados

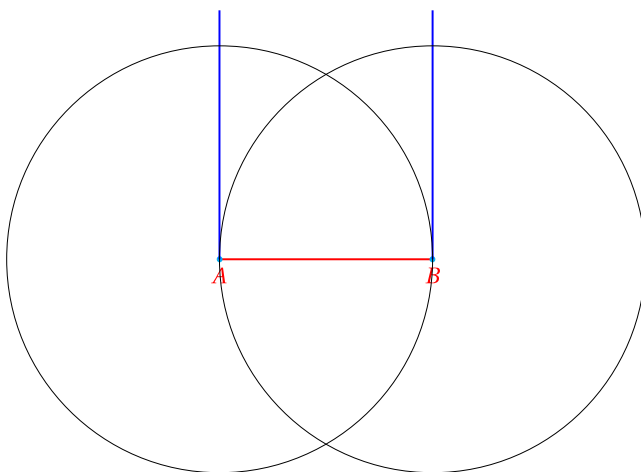
Empezamos con uno de los lados del cuadrado:



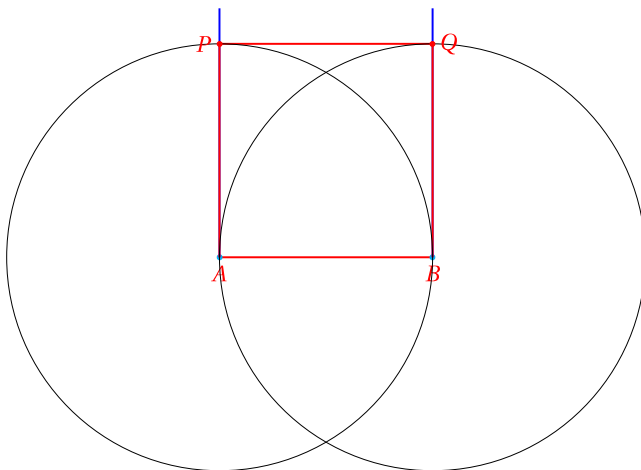
Construimos una perpendicular a cada extremo del lado dado:
(Ver construcción 2)



Trazamos una circunferencia con centro en A primero, luego en B y con radio igual a la longitud del lado:



Los puntos P y Q de intersección de cada circunferencia con las perpendiculares son los otros vértices del cuadrado:



§ 1.8

§ 1.8. Construcción de un segmento de una longitud dada

Construir un segmento de una longitud dada en una recta, a partir de un punto es muy sencillo:

1. Medimos la distancia con el compás.
2. Apoyándonos en el punto sobre la recta, marcamos un arco con la distancia medida.

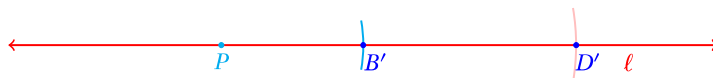


El segmento PB' es el buscado.

§ 1.9

§ 1.9. Construcción de la suma de dos segmentos

1. Primero construimos uno de los segmentos en la recta dada
2. Y luego el segundo.

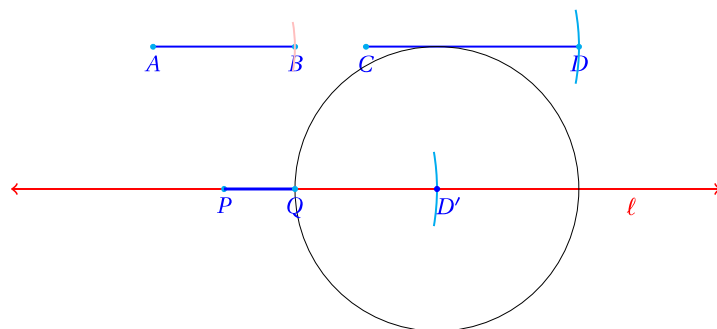


§ 1.10

§ 1.10. Construcción de la diferencia de dos segmentos

1. Primero construimos el más largo de los segmentos en la recta dada:

2. Y luego, apoyándonos en D' trazamos una circunferencia con radio de longitud del segmento más corto:



El segmento \overline{PQ} es el buscado.

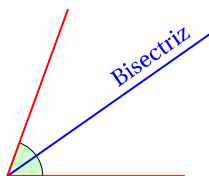
§ 1.11

§ 1.11. Trazar una bisectriz

BISECTRIZ

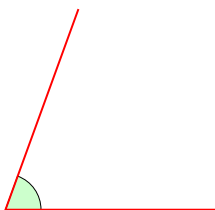
Recta que divide a un ángulo en dos ángulos de la misma medida. En otras palabras, la bisectriz es el eje de simetría del ángulo.

Definición 1.11.1

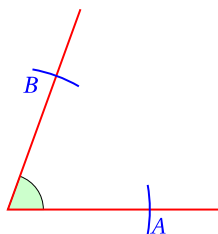


Ahora vamos a trazar bisectriz del ángulo dado.

Empezamos mostrando el ángulo al cual trazaremos la bisectriz:

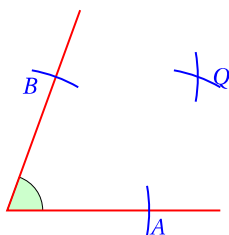


Primero abrimos el compás para dibujar dos arcos de mismo radio que corten, uno a cada lado del ángulo:

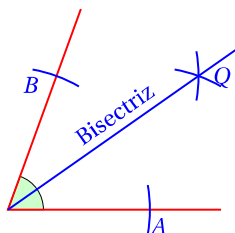


donde A y B son las intersecciones.

Ahora, apoyándonos en cada punto de intersección generados con estos trazos, volvemos a trazar dos arcos de mismo radio, que se corten entre ellos.



Ahora solo falta trazar la recta que pasa por el vértice del ángulo y el punto Q :

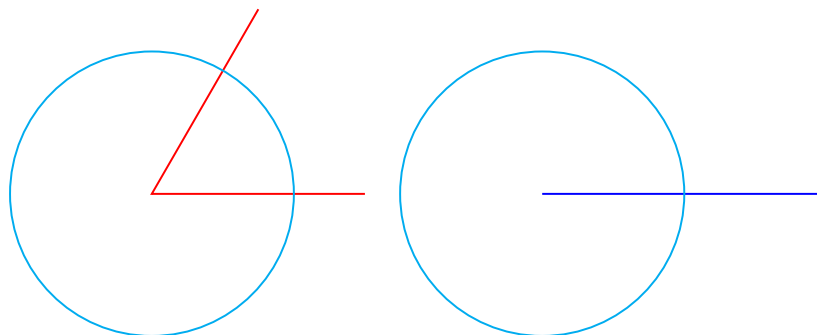


Y terminamos.

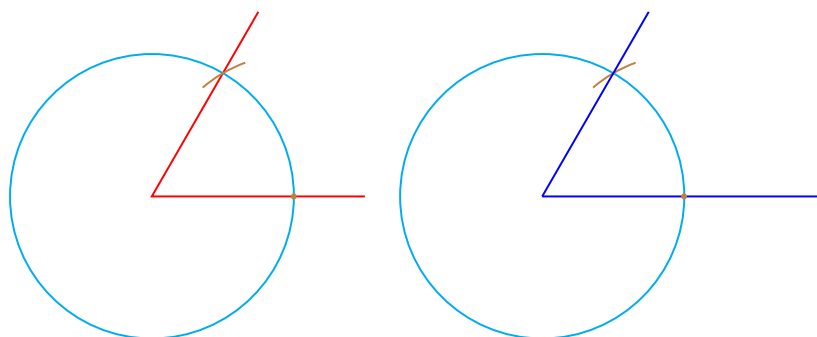
§ 1.12

§ 1.12. Hacer una copia de un ángulo

1. Primero construimos un rayo que servirá de lado para el ángulo a copiar.
2. Y luego, una circunferencia con centro en el vértice del ángulo a copiar.
3. Con ese mismo radio, dibujamos una circunferencia con centro en un extremo del segmento que dibujamos.



4. Ahora medimos con el compás la distancia entre las intersecciones de la circunferencia con los lados del ángulo.
5. Y con esa abertura del compás apoyándonos en la intersección de la circunferencia con el segmento cortamos a la circunferencia.

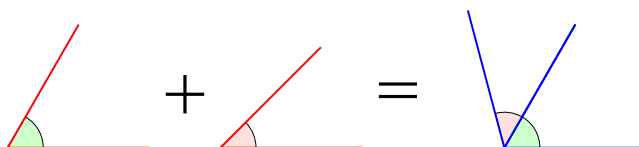


Finalmente, trazamos el otro lado del ángulo.

§ 1.13

§ 1.13. Suma de dos ángulos

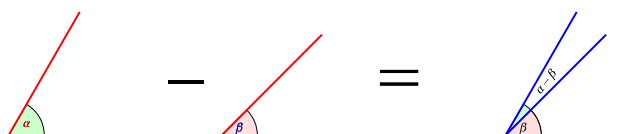
1. Empezamos copiando el primero de los dos ángulos (Ver construcción 12)
2. Y luego, tomando como base un lado del ángulo copiado, copiamos el otro ángulo.
3. Y terminamos.



§ 1.14

§ 1.14. Diferencia de dos ángulos

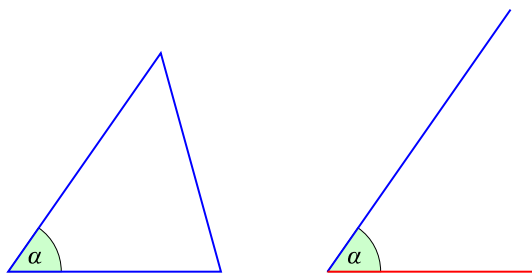
1. Empezamos copiando el primero de los dos ángulos
(Ver construcción 12)
2. Y luego, tomando como base el lado inicial del ángulo copiado, copiamos el otro ángulo.
3. Y terminamos.



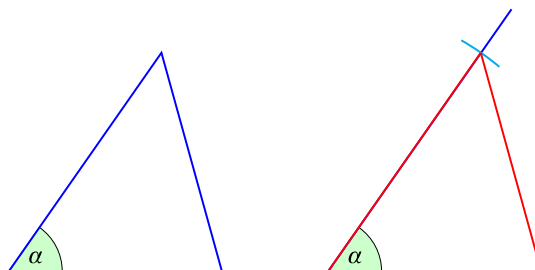
§ 1.15

§ 1.15. Construir un triángulo dados un ángulo interno y dos lados adyacentes

1. Empezamos copiando el primer lado del triángulo
(Ver construcción 8)
2. Y luego copiamos el ángulo entre los dos lados adyacentes
(Ver construcción 12)



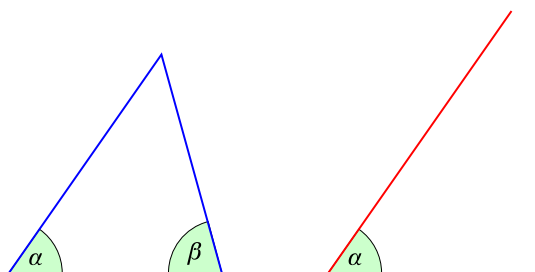
4. Ahora copiamos la longitud del segundo lado.
(Ver construcción 8)
5. Finalmente, trazamos el lado faltante que va de los extremos de los lados conocidos del triángulo.



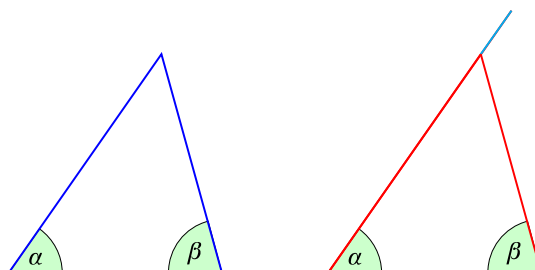
§ 1.16

§ 1.16. Construir un triángulo dados dos ángulos y el lado que comparten

1. Empezamos copiando el primer lado del triángulo
(Ver construcción 8)
2. Y luego copiamos el primer ángulo en un extremo del lado
(Ver construcción 12)



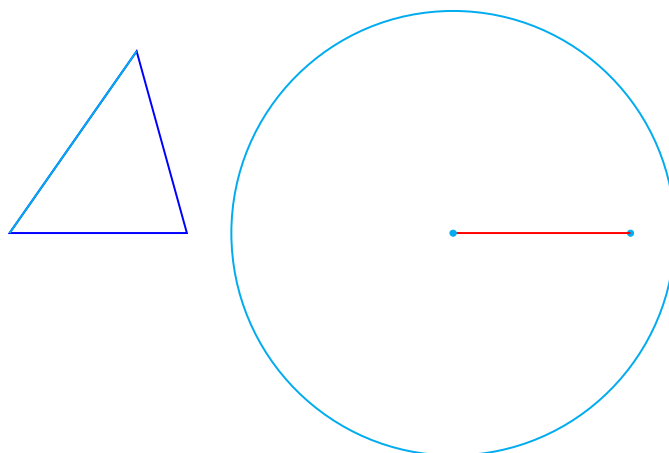
4. Ahora copiamos el segundo ángulo.
(Ver construcción 12)
5. Y hemos terminado.



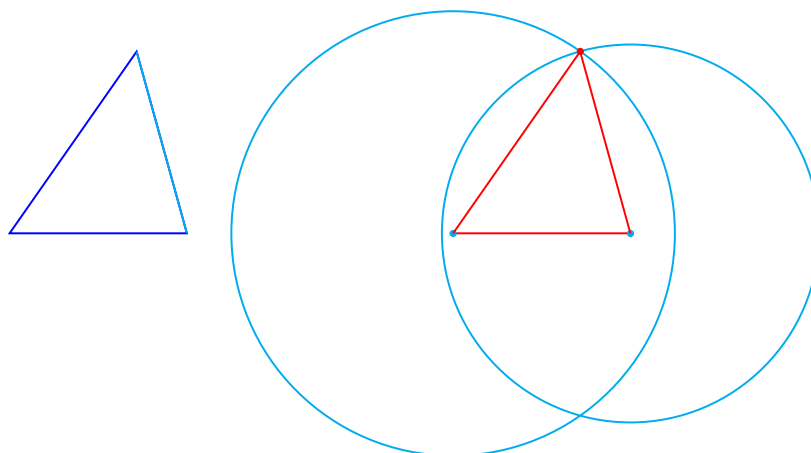
§ 1.17

§ 1.17. Construir un triángulo dados sus tres lados

1. Empezamos copiando el primer lado del triángulo
(Ver construcción 8)
2. Y luego trazamos una circunferencia con centro en un extremo del lado y con radio igual al segundo lado.



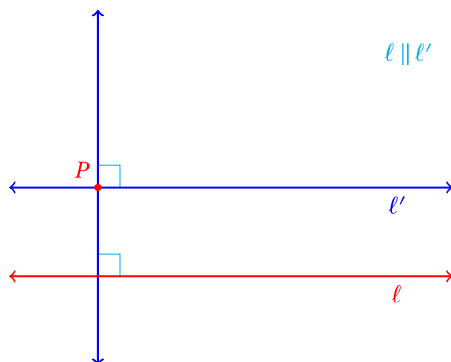
4. Y luego trazamos una circunferencia con centro en el otro extremo del lado y con radio igual al tercer lado.
5. El punto de intersección de las dos circunferencias es el tercer vértice del triángulo.



§ 1.18. Trazar una paralela a una recta por un punto dado

§ 1.18

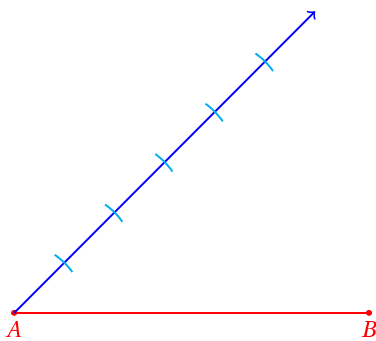
1. Trazamos una perpendicular a la recta dada que pase por el punto P dado
(Ver construcción 3)
2. Y luego trazamos una perpendicular a la recta trazada por el punto P del lado y con radio igual al segundo lado.
(Ver construcción 2)



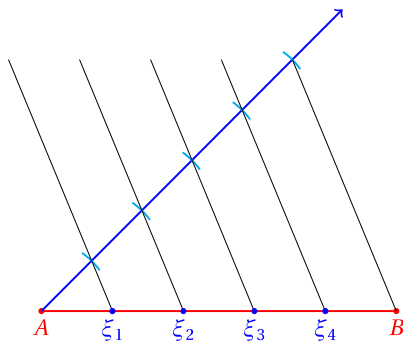
§ 1.19

§ 1.19. Dividir un segmento en n segmentos congruentes

1. Empezamos dibujando el segmento \overline{AB} a dividir.
2. Ahora trazamos un rayo con punto inicial en el extremo A del segmento dado.
3. Con un radio fijo, trazamos n segmentos congruentes sobre el rayo, empezando en A .



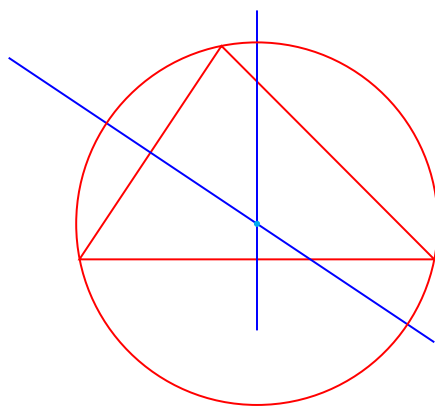
4. Conectamos la última división con B .
5. Paralelo a este segmento traza rectas que pasen por cada división y corten al segmento \overline{AB} .
6. Los puntos de intersección de estas rectas con el segmento \overline{AB} son los que dividen al segmento en n segmentos congruentes.



§ 1.20

§ 1.20. Trazar la circunferencia circunscrita a un triángulo

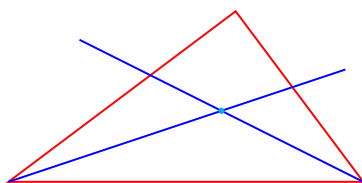
1. Empezamos dibujando el triángulo dado.
2. Ahora trazamos las mediatrices de dos lados del triángulo.
3. El punto de intersección de las dos mediatrices es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.



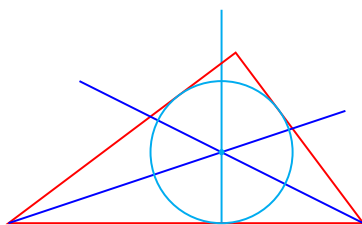
§ 1.21. Trazar la circunferencia inscrita a un triángulo

§ 1.21

1. Empezamos dibujando el triángulo dado.
2. Ahora trazamos las bisectrices de dos ángulos del triángulo.
3. El punto de intersección de las dos bisectrices es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.



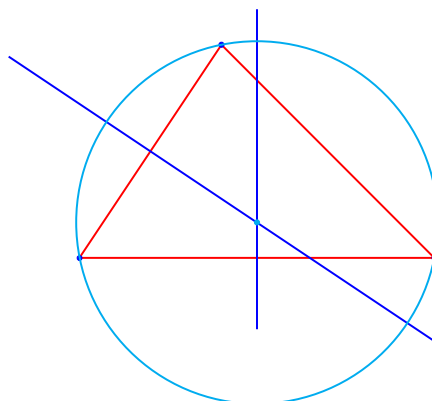
4. Ahora trazamos una perpendicular a un lado que pase por el punto de intersección de las dos bisectrices (Ver construcción 3)
5. La circunferencia inscrita pasa por el pie de la perpendicular.



§ 1.22

§ 1.22. Trazar la circunferencia que pasa por tres puntos

1. Empezamos dibujando el triángulo con vértices en los puntos dados.
2. Ahora trazamos las mediatrices de dos lados del triángulo.
3. El punto de intersección de las dos mediatrices es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.



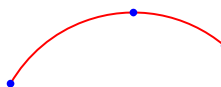
§ 1.23

§ 1.23. Trazar la circunferencia dado un arco

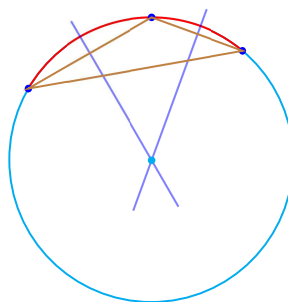
1. Empezamos dibujando el arco dado.



2. Ahora ubicamos tres puntos sobre el arco.



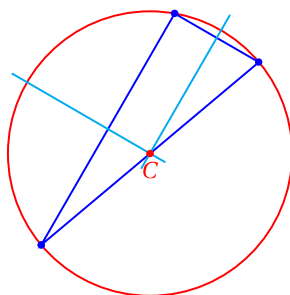
3. Finalmente, trazamos la circunferencia que pasa por esos tres puntos.
(Ver construcción 22)



§ 1.24. Ubicar el centro de una circunferencia

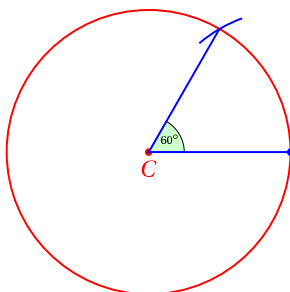
§ 1.24

1. Empezamos trazando la circunferencia dada.
2. Ahora ubicamos tres puntos sobre la circunferencia.
3. Usando la construcción 22 podemos encontrar el centro de la circunferencia.
(Ver construcción 22)

**§ 1.25**

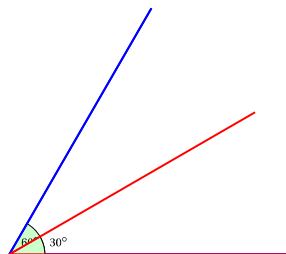
§ 1.25. Trazar un ángulo de 60°

1. Empezamos trazando una circunferencia.
2. Con el mismo radio, apoyando el compás en cualquier punto de la circunferencia, trazamos un arco que corte a la circunferencia.
3. Finalmente, unimos los tres puntos.

**§ 1.26**

§ 1.26. Trazar un ángulo de 30°

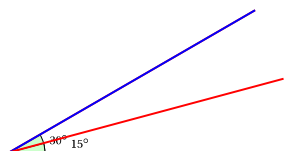
1. Empezamos trazando un ángulo de 60°
(Ver construcción 25)
2. Ahora trazamos la bisectriz del ángulo.
(Ver construcción 11)



§ 1.27

§ 1.27. Trazar un ángulo de 15°

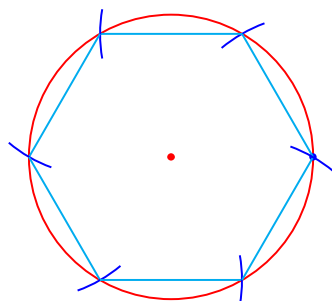
1. Empezamos trazando un ángulo de 30°
(Ver construcción 26)
2. Ahora trazamos la bisectriz del ángulo.
(Ver construcción 11)



§ 1.28

§ 1.28. Trazar un hexágono regular

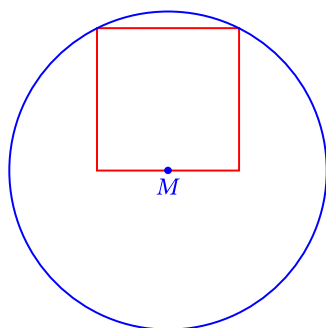
1. Empezamos trazando una circunferencia
2. Ahora con el mismo radio, trazamos un arco apoyándonos en cualquier punto de la circunferencia.
3. Con el mismo radio, trazamos arcos apoyándonos en el corte del último arco con la circunferencia.



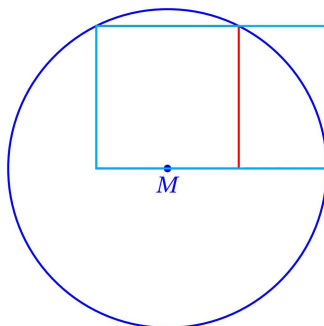
§ 1.29

§ 1.29. Trazar un rectángulo áureo

1. Empezamos trazando un cuadrado. (Ver Construcción 7)
2. Encontramos el punto medio M de su base. (Ver construcción 5)
3. Trazamos una circunferencia con centro en M que pase por el vértice opuesto al lado del cuadrado.



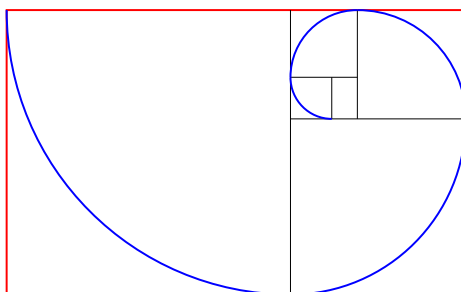
4. Extendemos la base hasta que corte a la circunferencia.
5. Este segmento es la base del rectángulo áureo.
La altura del rectángulo áureo es la altura del cuadrado.
Ahora podemos trazar el rectángulo áureo.



§ 1.30

§ 1.30. Trazar una espiral áurea

1. Empezamos trazando un rectángulo áureo (Ver construcción 29)
2. Trazamos un arco de 90° como se indica en la figura.
3. Trazamos los siguientes arcos como se indican en la figura.

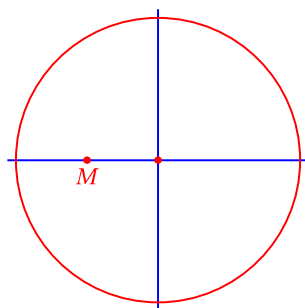


Observa que cada vez vamos dibujando cuadrados dentro de cada rectángulo áureo que vamos formando conforme avanzamos en la construcción.

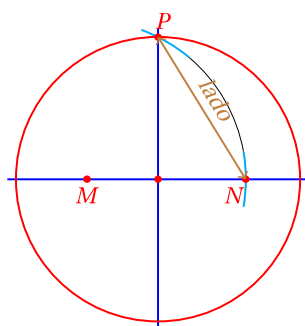
§ 1.31

§ 1.31. Trazar un pentágono regular

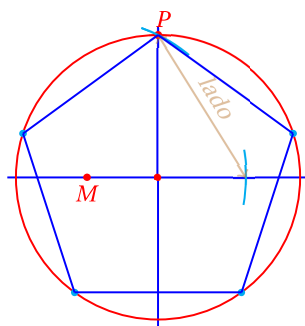
1. Empezamos trazando una circunferencia.
2. Ahora trazamos dos perpendiculares se corten en el centro de la circunferencia.
3. Encontramos el punto medio M indicado en la figura.
(Ver construcción 5)



4. Ahora apoyándonos en M abrimos el compás hasta que corte la intersección de la circunferencia y la recta vertical.
5. Con este mismo radio, y apoyándonos en M cortamos la recta horizontal.
6. La distancia entre N y P es la longitud del lado del pentágono regular.



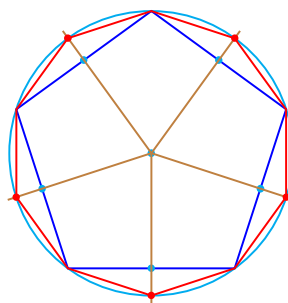
7. Medimos esta distancia con el compás y la utilizamos para encontrar los demás vértices del pentágono.



§ 1.32

§ 1.32. Trazar un decágono regular

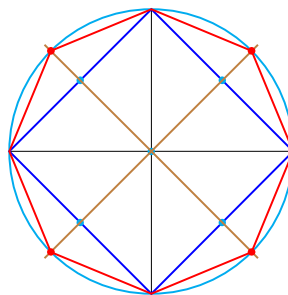
1. Empezamos trazando un pentágono regular (Ver construcción 31).
2. Ahora encontramos el punto medio de cada uno de sus lados.
3. Encontramos la intersección de la recta que pasa por el centro de la circunferencia y el punto medio de cada lado con la circunferencia.
4. Esos puntos son los otros cinco vértices del decágono regular.



§ 1.33

§ 1.33. Trazar un octágono regular

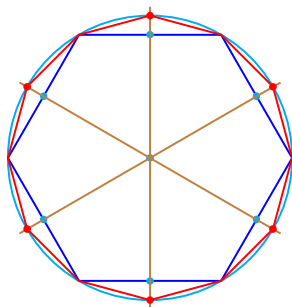
1. Empezamos trazando un cuadrado (Ver construcción 7) y una circunferencia con centro en la intersección de las diagonales del cuadrado que pase por uno de sus vértices.
2. Ahora encontramos el punto medio de cada uno de sus lados.
3. Encontramos la intersección de la recta que pasa por el centro de la circunferencia y el punto medio de cada lado con la circunferencia.
4. Esos puntos son los otros vértices del octágono regular.



§ 1.34. Trazar un dodecágono regular

§ 1.34

1. Empezamos trazando un hexágono regular (Ver construcción 28)
2. Ahora encontramos el punto medio de cada uno de sus lados.
3. Encontramos la intersección de la recta que pasa por el centro de la circunferencia y el punto medio de cada lado con la circunferencia.
4. Esos puntos son los otros vértices del octágono regular.



CRÉDITOS

Autor: Efraín Soto Apolinar

Productor general: Efraín Soto Apolinar

Dirección y coordinación editorial: Efraín Soto Apolinar

Edición: Efraín Soto Apolinar

Composición tipográfica: Efraín Soto Apolinar

Diseño de portada: Efraín Soto Apolinar

Diseño de figuras: Efraín Soto Apolinar

Revisión técnica: 15 de mayo de 2010 (*Elaborada por el autor*)

Año de edición: 2010

Año de publicación: 2010

Última revisión: 15 de mayo de 2010.

Última modificación: 16 de mayo de 2010.

Software utilizado: En la edición, diseño y composición tipográfica de este material se han utilizado los siguientes programas:

- | | | |
|---|--------------------------|--|
| ① | $\LaTeX 2\epsilon$ | Tipografía del texto, ecuaciones y diagramas. |
| ② | TikZ | Diseño de figuras, encabezados y diagramas. |
| ③ | pgfPlots | Gráficas y diagramas. |
| ④ | T _X nicCenter | Edición del código fuente $\LaTeX 2\epsilon$. |

Apreciado lector, agradezco sus comentarios, sugerencias y correcciones a la cuenta de correo electrónico:

efra.soto.a@gmail.com

Usted puede descargar esta compilación de construcciones geométricas elementales de manera gratuita del siguiente sitio de Internet:

<http://www.aprendematematicas.org.mx/>

Gracias por respetar los términos de uso de este material.