

# GeoGebra<sup>4</sup>

## Guía Rápida de Referencia

### ¿Qué es GeoGebra?

- Un conjunto unificado y fácil de usar que conforma un potente programa de Matemática Dinámica
- Un utilitario para enseñar y aprender en todos los niveles educativos
- Un encuadre versátil en que se conjugan **geometría** interactiva, **álgebra**, el cálculo propio del análisis y de las estadísticas y sus registros gráficos, de organización en tablas y de formulación simbólica.
- Una fuente abierta del programa libre accesible en [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)

### Lo Primero a Destacar

- *GeoGebra* le facilita a los estudiantes la creación de construcciones matemáticas y modelos para las exploraciones interactivas y los sucesivos cambios de parámetros.
- *GeoGebra* es también una herramienta de autoría que les permite a los docentes crear páginas-web interactivas, seleccionarlas de entre las que colegas de todo el mundo ofrecen para compartir las producciones en [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)

Al abrir *GeoGebra*, aparece la siguiente ventana:

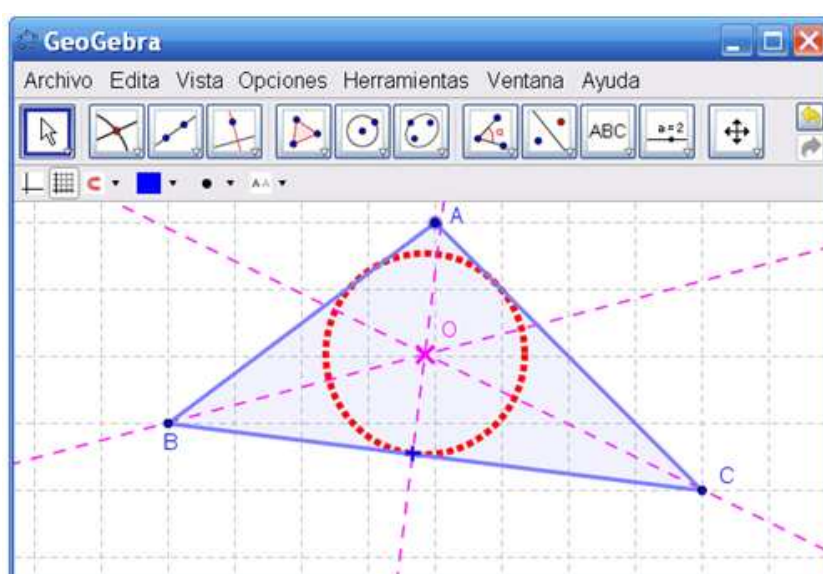


Guiando con el ratón (o *mouse*) los útiles de la **Barra de Herramientas** pueden trazarse construcciones en la **Vista Gráfica** a partir de elementos cuyas coordenadas o ecuaciones aparecen, en simultáneo, en la **Vista Algebraica**: lo geométrico y lo algebraico en GeoGebra, se complementan y se registran uno junto al otro,.

En la **Barra de Entrada** pueden anotarse directamente coordenadas, ecuaciones, comandos y funciones que pasarán a representarse en la **Vista Gráfica** al ingresarse pulsando *Enter* (*Intro* en algunos teclados).

## Primer Ejemplo: Circunferencias en un Triángulo

**Tarea:** Construir un triángulo y la circunferencia intermedia entre la inscrita y la que lo circunscribe.








### Construcción Guiada por el *Ratón o Mouse*

#### Preparativos


- Abrir el menú **Disposiciones** y seleccionar *Geometría*.


#### Pasos de la Construcción




1		Seleccionar de la barra de herramientas, la de " <i>Polígono</i> ". Ahora, un <i>click</i> tras otro en la <b>Vista Gráfica</b> , permite crear los vértices <i>A</i> , <i>B</i> , y <i>C</i> de un triángulo que se cierra reiterando un <i>click</i> sobre <i>A</i> .
2		Elegir la " <i>Bisectriz</i> ": (un <i>click</i> sobre el triángulito inferior izquierdo que aparece en el borde de la cuarta caja de herramientas, despliega todas las disponibles y activar la cuarta, la <i>Bisectriz</i> . Para trazar las de un par de ángulos, basta con indicar los tres puntos que los delimitan, en sentido anti-horario con el vértice entre sendos laterales: <i>B</i> , <i>C</i> , <i>A</i> para uno y <i>A</i> , <i>B</i> , <i>C</i> para el otro.


3		Con la herramienta “ <i>Intersección de Dos Objetos</i> ”, indicando ambas bisectrices, queda establecido el punto del centro de la circunferencia buscada. Para llamarlo “O”, basta con un clic derecho sobre el punto (Mac OS: ctrl-clic) y elegir “Renombra” del menú contextual desplegado.
4		Se traza la “ <i>Recta Perpendicular</i> ” desde “O” al segmento <i>a</i> (del lado que une <i>a B</i> con <i>C</i> ..
5		Se vuelve a emplear la herramienta “ <i>Intersección de Dos Objetos</i> ” para que quede establecido el de la perpendicular con el lado <i>a</i> , “E”. <u>Atención:</u> Es importante distinguir que lo que se interseca sea la perpendicular con el lado, no con el triángulo que es una alternativa también posible pero errónea en este caso.
6		Con “ <i>Circunferencia dados su Centro y uno de sus Puntos</i> ” se completa la construcción con un clic en el punto centro O y otro en el de intersección recientemente creado, “E”
7		Con “ <i>Elige y Mueve</i> ” se puede emplear el ratón o mouse para desplazar los vértices del triángulo y notar como toda la construcción se ajusta dinámicamente a los cambios, manteniendo las relaciones establecidas que dan lugar a la circunferencia correspondiente.


### Algunas Pistas

 Los botones de “**Deshace**”/ y “**Rehace**” en la esquina derecha de la barra de herramientas son muy útiles para el desenvolvimiento de cualquier construcción y conviene emplearlos al menos tentativamente

 Para **ocultar un objeto**, basta con apuntarlo y con un clic derecho (en SO Mac, Ctrl-clic) y en el menú contextual desplegado, quitar el tilde a *Muestra Objeto*.

 Para cambiar la **apariencia de los objetos**, (color, tipo de trazo,...) se puede emplear la barra de estilo: un clic  en el margen superior de la Vista Gráfica, lo expone u oculta. Para más opciones, basta con un clic (en Mac OS: Ctrl-clic) sobre el ícono de  *Propiedades de GeoGebra* y seleccionar  *Objetos* del menú.

 Los **Ejes** y la **Cuadrícula** pueden mostrarse u ocultarse empleando la Barra de Estilo.

 Se pueden seleccionar diferentes *vistas* - como la **Vista Algebraica**, **Gráfica**, **Hoja de Cálculo** y/o **CAS de Algebra Simbólica**, según se tilden o no en el menú “*Vista*”, o en la barra lateral de **Apariencias** (a la derecha de la Vista Gráfica)..

 Para **desplazar la construcción** en la **Vista Gráfica**, basta con seleccionar la herramienta que “**Desplaza la Vista Gráfica**” y arrastrarla con ayuda del *mouse* o ratón.




El **Protocolo de Construcción** es un ítem del menú **Vista** en cuya ventana emergente se lista la secuencia de construcción (para revisarla paso a paso y cambiar el orden o modificarla). Usando los botones correspondientes se puede volver a realizar la construcción paso a paso. En su propio menú se fija la lista exhaustiva de datos a ostentar por cada paso de construcción.

- Además, se pueden desplazar las filas de cada paso hacia arriba o abajo para modificar el orden de los pasos.

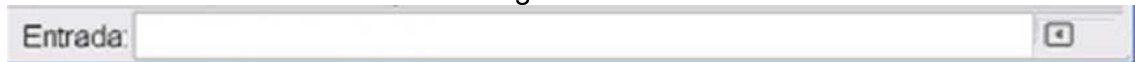
## Construcción utilizando la Barra de Entrada

### Preparativos

- Vamos ahora a llevar adelante la misma construcción pero usando la barra de entradas, por lo que recomenzamos todo pidiendo *Nuevo* del menú *Archivo*.
-  Abrimos el menú *Disposiciones* para seleccionar *Algebra y Gráficos*.

### Pasos de Construcción

Veamos cómo construir el mismo triángulo desde la Barra de Entrada.



Comenzamos por abrir una nueva hoja de trabajo (**Archivo – Nuevo**) e introducir los siguientes comandos en la Barra de Entrada (al pie de la pantalla), pulsando *Enter* (*Intro* en algunos teclados) al final de cada línea.

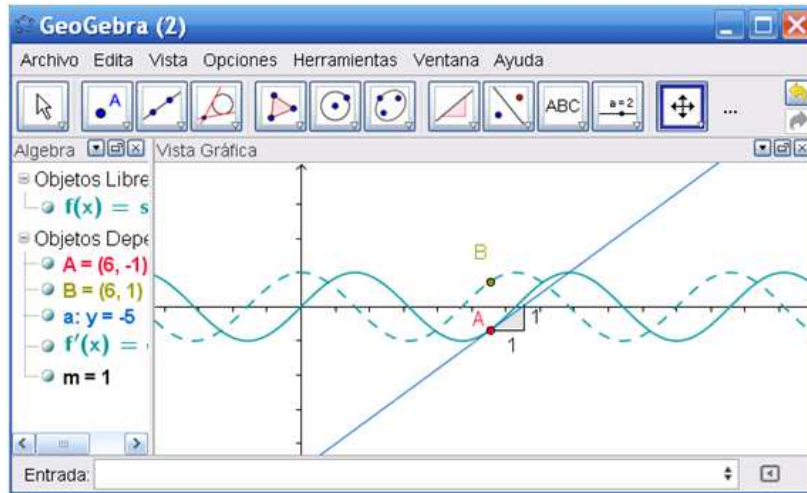
```
A = (2, 1)
B = (12, 5)
C = (9, 11)
Polígono[A, B, C]
CircunferencialInscrita[A, B, C]
b_a = Bisectriz[A, B, C]
b_b = Bisectriz[B, C, A]
M = Interseca[b_a, b_b]
```

### Algunos trucos

- Auto completado de comandos: después de ingresar las dos primeras letras de un comando, se completa una palabra sugerida. Si se trata del comando deseado, basta pulsar *Enter* (*Intro* en algunos teclados) pero si no es así, se continúa tecleando el nombre del comando.
- No es necesario teclear el nombre de cada comando: es posible seleccionarlos de la lista situada a la derecha del campo de entradas.
- Un *clic* sobre el botón **Ingresar** (a la izquierda) activa el modo **Campo de entradas** que permite introducir directamente un objeto, simplemente eligiéndolo con un *clic* en la **Ventana de Álgebra** o en la **Zona Gráfica**.
- Una ventana expone explicaciones más detalladas al respecto al pulsar el botón de **Ayuda** con un *clic* sobre el correspondiente botón de la izquierda.
- Combinando las ventajas de las dos formas de trabajo posibles, mediante el *mouse* o ratón y con la introducción de comandos, se obtendrán los mejores resultados con **GeoGebra**.


## Ejemplo 2: Derivada y Tangente de una Función

**Desafío:** Representar gráficamente la función seno, su derivada y su tangente en un punto, así como el triángulo ilustrativo de la pendiente de la misma.










### Primera Versión: Punto sobre la gráfica de la función



#### Preparativos

- Abrir una  Nueva Ventana con tal opción del menú *Archivo*.

#### Pasos de Construcción

1	$f(x) = \sin(x)$	Teclear en el campo de entradas la función $f(x) = \sin(x)$ y pulsar Enter (Intro en algunos teclados).
2		Seleccionar la herramienta <i>Nuevo Punto</i> y dar <i>click</i> sobre la representación gráfica de la función $f$ para crear un punto $A$ sobre la gráfica de $f$ .
3		Activar la herramienta <i>Tangente</i> y dar <i>click</i> sobre el punto $A$ y sobre la gráfica de $f$ . Renombrar $t$ a la tangente ( <i>click</i> derecho sobre ella y <i>Renombra</i> ).
4		Seleccionar la herramienta <i>Elige y Mueve</i> y arrastrar el punto $A$ observando el movimiento de la tangente.
5		Activar la herramienta <i>Pendiente</i> y dar <i>click</i> sobre la tangente trazada en el punto $A$ .
6		Seleccionar la herramienta <i>Elige y Mueve</i> y arrastrar el punto $A$ observando el movimiento de la tangente y de la pendiente $m$ correspondiente.
7	$B = (x(A), m)$	Teclear $B = (x(A), m)$ y activar la traza de este punto ( <i>click</i> derecho sobre $B$ y <i>Activa Rastro</i> ).
8	 	Seleccionar la herramienta <i>Elige y Mueve</i> y arrastrar el punto $A$ observando el movimiento de la tangente y de la pendiente $m$ correspondiente y el rastro que deja $B$ .
9	Derivada[ $f(x)$ ].	Teclear el comando <i>Derivada[f]</i> en la Barra de Entrada

## Algunos trucos

- Ingresar una función diferente, por ejemplo  $f(x) = x^3 - 2x^2$  en el campo de entradas; inmediatamente aparecerán su derivada y su tangente.
- Probar también el comando `Integral[f(x)]`.
- Seleccionar la herramienta que  *Elige y Mueve* y arrastrar la gráfica de  $f$  con el ratón o *mouse*. Observar los cambios en las expresiones de la función y de su derivada
- **Completado Automático de Comandos:** tras ingresar las primeras dos letras de un comando, aparecerá completo automáticamente el que comience con estas para que se acepte la sugerencia con un `Enter` o `Intro` o se continúe escribiendo.
- La ayuda de cada entrada  se encuentra a la derecha, próxima a la barra de entradas y ofrece una lista de todos los comandos disponibles en *GeoGebra*.

## Segunda Versión: Punto en $x = a$

### Preparativos

- Vamos a realizar la misma construcción anterior pero de otro modo. Para empezar, seleccionar **Archivo – Nuevo** para abrir una nueva hoja de trabajo.

### Pasos de Construcción

Para este procedimiento, basta introducir en el campo de entradas los comandos siguientes, tecleando **Enter (Intro)** en algunos teclados) al final de cada línea:

```
f(x) = sin(x)
a = 2
T = (a, f(a))
t = Tangente[a, f]
m = Pendiente[t]
B = (x(T), m)
Derivada[f]
```

### Tangente sin recurrir al comando

*GeoGebra* también trabaja con vectores y ecuaciones paramétricas. Así será posible construir una tangente  $t$  sin necesidad de recurrir al comando `Tangente[]`.

Para comprobarlo, suprimir la tangente de la figura, con *clic* derecho sobre la recta y seleccionando **Borra**.

Luego introducir los comandos siguientes:

```
v = (1, f'(a))
t: X = A + r v
```

$v$  es un vector direccional de la tangente  $t$ . Se puede utilizar, en lugar de  $r$ , cualquier otra letra como parámetro.

## Algunos Trucos

Seleccionar la herramienta que **Elige y Mueve** y dar *clic* sobre el número  $a$ . Se pueden pulsar las teclas de las flechas para modificar su valor de  $a$ . Inmediatamente el punto  $T$  y la tangente se desplazarán a lo largo de la gráfica de función  $f$ .

## Deslizadores

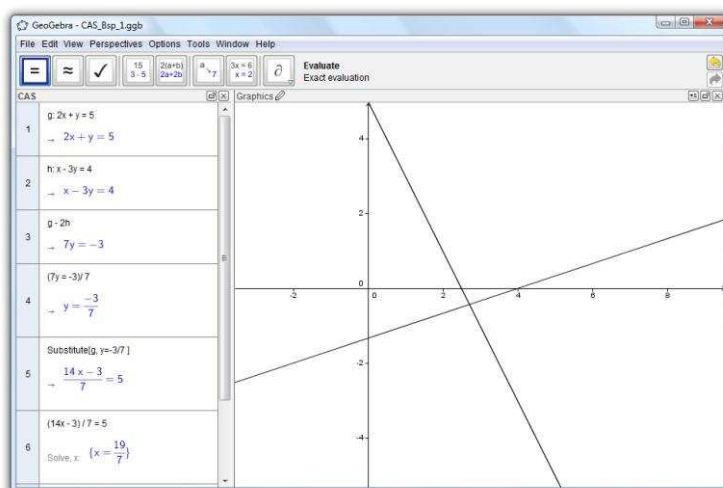
- También puede controlarse el valor del número  $a$  creando un **deslizador**: con un *clic* sobre el símbolo  $\odot$  a la izquierda de  $a$  en la **Vista Algebraica**. Se expone el **deslizador** ilustrativo de  $a$  y se su cambia valor, arrastrando con el ratón o *mouse* el punto que aparece sobre la línea que lo representa.

## Truco

Los deslizadores y las teclas-flecha son especialmente útiles para trabajar con parámetros, por ejemplo  $p$  y  $q$  en la función cuadrática  $y = x^2 + p x + q$ .

## Ejemplo 3: Resolución de un Sistema de Ecuaciones

**Desafío:** Resolver un sistema de ecuaciones lineales por método de sustitución.



## Preparativos

- Pulsando la flecha en el borde lateral derecho de la Vista Gráfica, en el menú desplegado de **Apariencias**, seleccionar **CAS** y **Gráficos**. La sigla CAS refiere a álgebra simbólica computacional.
- Es importante tener en cuenta que la Vista CAS de Cálculo Simbólico sólo está disponible a partir de GeoGebra 4.2 en adelante.

## Pasos de Construcción

Se deben anotar los siguientes comandos en las filas de la vista CAS, pulsando **Enter** (**Intro** en algunos teclados), después de cada línea.

1	g: $2x + y = 5$	... para crear la recta g
2	h: $x - 3y = 4$	... para crear la recta h
3	$g - 2h$	Se restan las ecuaciones para eliminar la variable x
4	)	Ingresar) para obtener el resultado de la línea previa. Ahora, basta con teclear /7 para obtener $(7y = -3)/7$
5	Sustituye[g, $y=-3/7$ ]	Sustituye y por $-3/7$ en la primera ecuación g.
6	$3x = 6$ $x = 2$	Clic sobre la salida $\frac{14x - 3}{7} = 5$ y de la fila previa para copiarla en la activa actual. Ahora, un <i>clic</i> en la herramienta <i>Resuelve</i> para obtener la solución de x también.

### Algunos Trucos

La vista CAS permite trabajar con fracciones, ecuaciones y formulas que incluyan variables indefinidas, de modo que los estudiantes puedan incursionar en este tipo de tareas con *GeoGebra*.

15

3·5 Para manipular solo una parte de una expresión, basta con seleccionarla con el *mouse* o ratón y a continuación un *clic* sobre la herramienta, por ejemplo **Factoriza**, que afectará a la expresión escogida.

x =

La solución también se puede determinar inmediatamente, definiendo  $f(x)$  y  $g(x)$  en el ejemplo previo, seleccionando ambas filas y aplicando la herramienta que *Resuelve*.

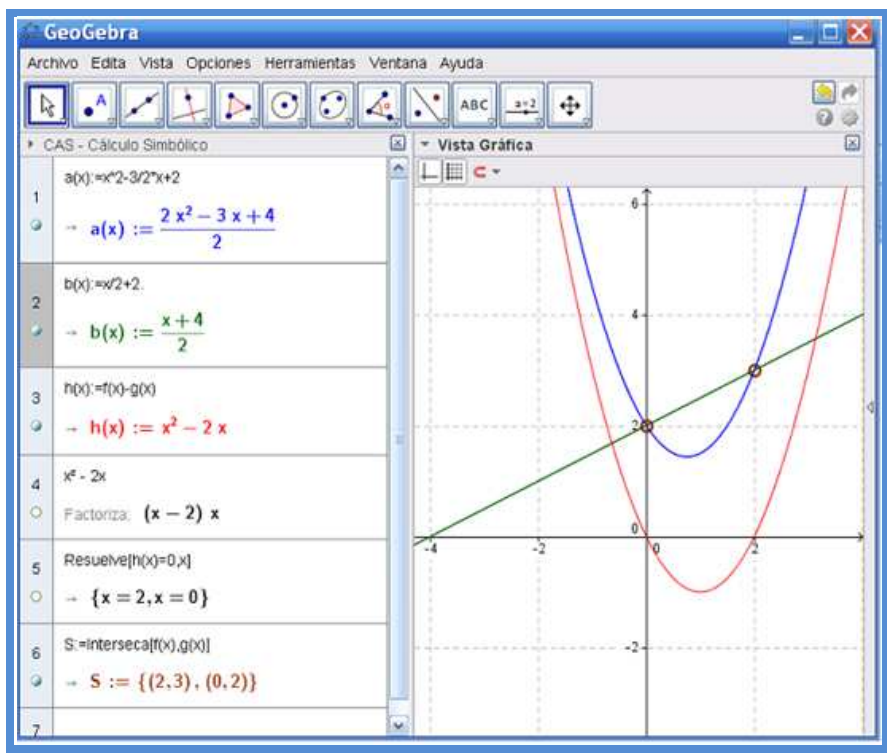
## Ejemplo 4: Intersección de Funciones Polinómicas

**Desafío:** *Intersecar una parábola con una función lineal para determinar las raíces de su diferencia*

### Preparativos

- Pulsando la flecha en el borde lateral derecho de la Vista Gráfica, en el menú desplegado de **Apariencias**, seleccionar  CAS y **Gráficos**. La sigla CAS refiere a álgebra simbólica computacional.
- Es importante tener en cuenta que la Vista CAS de Cálculo Simbólico sólo está disponible a partir de *GeoGebra* 4.2 en adelante.





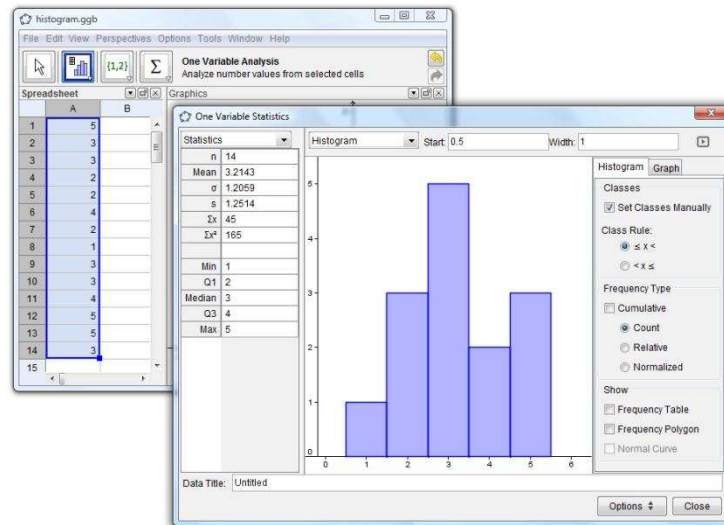
### Pasos de Construcción

Se deben anotar los siguientes comandos en las filas de la vista CAS, pulsando **Enter** (**Intro** en algunos teclados), después de cada línea y siempre evaluando cada entrada.

1		Anotar $f(x) := x^2 - 3/2 \cdot x + 2$ en la primera fila de para definir $f(x)$ . Evaluar pulsando la tecla <b>Enter</b> ( <b>Intro</b> en algunos teclados). Pista: := se emplea para las asignaciones..
2		En la segunda fila, anotar $g(x) := x/2 + 2$ .
3		Definir $h(x)$ como $h(x) := f(x) - g(x)$ en la tercera fila.
4	15 3·5	Anotar $h(x)$ en la cuarta línea y seleccionar la herramienta que <i>Factoriza</i> . Las raíces quedarán expresadas de inmediato.
5		Emplear el comando <u>Resuelve[h(x)=0,x]</u> para confirmar las <u>soluciones</u> previamente halladas.
6		Crear los puntos de intersección anotando $S := \text{Interseca}[f(x), g(x)]$ .

## Ejemplo 5: Análisis de Datos

**Desafío:** Crear un histograma y evaluar media, mediana y moda, mínimo y máximo de una serie de valores.



### Preparativos

- Abrir el menú *Vista* y seleccionar *Hoja de Cálculo* o pulsar en la flecha sobre el lateral derecho de la Vista Gráfica y en el menú *Apariencias* desplegado seleccionar *Hoja de Cálculo y Gráficos*

### Pasos de Construcción

1		Ingresar algunos datos en las celdas de la columna A de la hoja de cálculo. Por ejemplo, completar desde A1 a A14 con valores como 5, 3, 3, 2, 2, 4, 2, 1, 3, 3, 4, 5, 5, 3
2		Resaltar las celdas y seleccionar la herramienta apropiada como, para este ejemplo, “Análisis una Variable”. <u>Pista:</u> En este ejemplo: resaltar las celdas A1 a A14 y con un <i>clic</i> en la herramienta <i>Análisis Una Variable</i> . . Tras el <i>clic</i> en <i>Análisis de los Datos</i> en la caja de Diálogo de la <i>Fuente de Datos</i> , aparecerá <i>Analiza-</i> la de <i>Análisis de Datos</i> -.
3		Elegir las “Clases” apropiadas en la zona superior de la ventana. <u>Pista:</u> Para los números de este ejemplo, se emplearon 5 <i>Clases</i> porque hay cinco valores diferentes.
4	$\Sigma x$	Seleccionar el ícono <i>Muestra Estadísticas</i> de la <i>Barra de Estilo</i> para abrir el panel de <i>Estadísticas</i> . Hallar la media, mediana, el máximo y el mínimo de los datos en la sección “ <b>Estadísticas</b> ” del sector izquierdo de la ventana emergente.
5		<i>Clic</i> el botón en la zona superior derecha permite seleccionar “ <i>Selección Manual de Clases</i> ” en el menú derecho de “ <i>Histograma</i> ”. <u>Pista:</u> Pulsar <i>Enter</i> ( <i>Intro</i> en algunos teclados) después de especificar el valor de “ <i>Inicio</i> ” 0.5 y el “ <i>Ancho</i> ” 1 (valores de este ejemplo).

## Algunos Trucos

Cambiar algunos valores en la columna A permite notar la influencia sobre el histograma y los valores estadísticos como media, mediana, máximo y mínimo.

Modificar el tipo de diagrama de “Histograma” a “Diagrama de Cajas” en la caja de listas arriba del histograma.

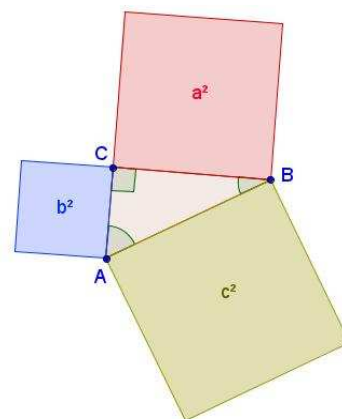
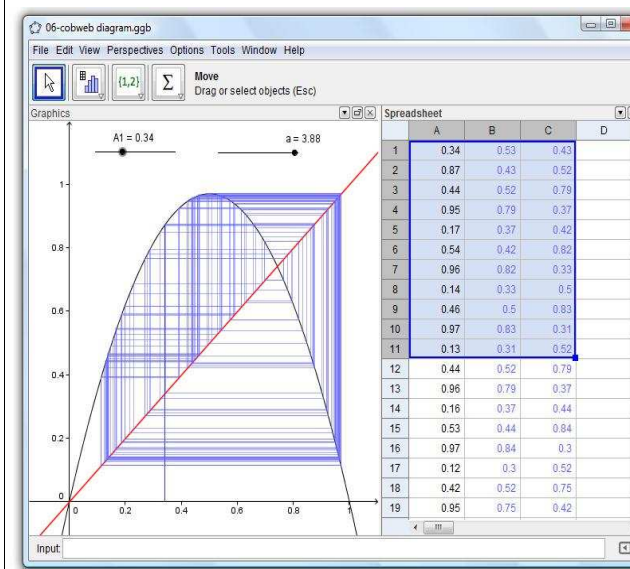
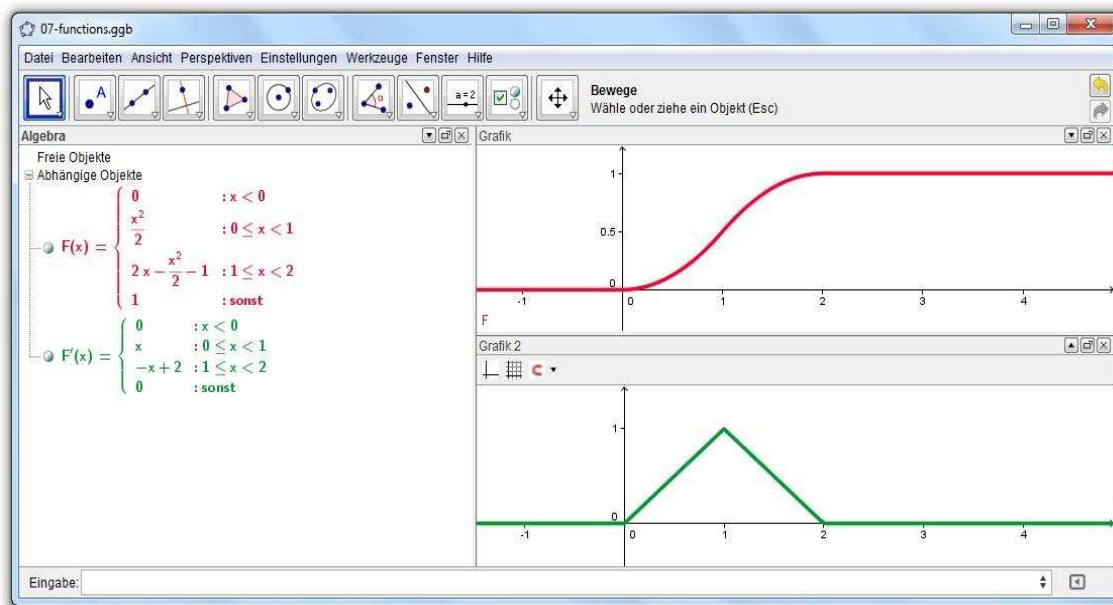
## Más Información

*GeoGebra* también permite crear fácilmente páginas web dinámicas porque no sólo exhiben sino que permiten la interacción desde cualquier navegador (como Firefox, Netscape, Safari o Internet Explorer). La página web de *GeoGebra* ofrece ejemplos de este tipo además de otras informaciones y recursos. Quedan invitados a visitar...

Software	<a href="http://www.geogebra.org">http://www.geogebra.org</a> La página web de <i>GeoGebra</i> <a href="http://www.geogebra.at">www.geogebra.at</a> en que encontrarán tanto información complementaria y diversificada como... ¡la última versión del programa!
Manual y Tutoriales	<a href="http://wiki.geogebra.org">http://wiki.geogebra.org</a>
GeoGebra en Tube	<a href="http://www.geogebraTube.org">http://www.geogebraTube.org</a>
Ejemplos y Materiales (Banco de Recursos Educativos)	<a href="http://www.geogebra.at/en/wiki">www.geogebra.at/en/wiki</a>
Foro de Usuarios	<a href="http://www.geogebra.org/forum">http://www.geogebra.org/forum</a>

Por sugerencias o avisos, dirigirse en inglés a [Markus.Hohenwarter@sbg.ac.at](mailto:Markus.Hohenwarter@sbg.ac.at) o en español a la traductora y moderadora, [liliana.saidon@centrobabbage.com](mailto:liliana.saidon@centrobabbage.com)

Traducción, actualización, edición y revisión de Liliana Saidon  
[liliana.saidon@centrobabbage.com](mailto:liliana.saidon@centrobabbage.com) Directora del Centro Babbage – Istituto  
 GeoGebra para la República Argentina.  
 Traducción previa de Manuel Sada [msadaall@pnte.cfnavarra.es](mailto:msadaall@pnte.cfnavarra.es)



$$a = 10.36 \quad a^2 = 107.29 \quad a^2 + b^2 =$$

$$b = 6.01 \quad b^2 = 36.15 \quad 107.29 + 36.15 = 143.44$$

$$c = 11.98 \quad c^2 = 143.44 \quad a^2 + b^2 = c^2$$